Nederlandse Samenvatting

Wavelets: Programmatuur en Toepassingen

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Tijdens de voorbije jaren heeft de wavelet-transformatie haar belang bewezen als een hulpmiddel voor o.a. signaal- en beeldverwerking en numerieke analyse, en dit in allerlei toepassingsgebieden.

1.1 Een overzicht van wavelet-onderzoek

Wavelet-theorie is een synthese van ideeën uit vele verschillende onderzoeksdomeinen. Ze combineert aspecten zoals filterbanken, multiresolutie, (bi)orthogonaliteit, ...

De eerste wavelet-transformaties waren continue wavelet-transformaties. Bij een continue wavelet-transformatie (CWT) wordt een signaal geanalyseerd door inwendige producten te berekenen met testfuncties. Alle testfuncties worden gegenereerd door één oscillerende functie met een compacte drager. Deze waveletfunctie moet aan slechts één voorwaarde voldoen: haar integraal moet nul zijn. Men genereert verschillende testfuncties als dilaties en translaties van de waveletfunctie: de analyse van het signaal gebeurt dus door een instelbaar tijds-frequentievenster. Deze lokaliteit in zowel tijd als frequentie biedt een aantal voordelen t.o.v. Fourieranalyse [21].

De discrete wavelet-transformatie (DWT) is een aanpassing aan digitale signalen die discreet zijn [43]. Meestal beperkt men niet enkel de translaties tot veelvouden van de bemonsteringsafstand, maar neemt men alleen dyadische dilatiefactoren. Men onderscheidt dus meerdere resolutieniveaus, met een schaalfactor 2 tussen elke 2 opeenvolgende niveaus. Hierdoor bekomt men een multiresolutieanalyse [34] die verwant is met piramidale schema's zoals de Laplaciaanse piramide [1].

Als de wavelet-functies orthogonaal zijn is de DWT stabiel. De eerste orthogonale wavelets met compacte support werden geconstrueerd door Daubechies [12]. Deze lieten een efficiënte implementatie toe: de snelle wavelet-transformatie (FWT), ook wel gekend als het filterbankalgoritme. Hier heeft men dus een verband met filterbanken en subband-codering. Door de orthogonaliteitsvoorwaarden te verzwakken tot biorthogonaliteitsvoorwaarden kreeg men biorthogonale wavelets, die een combinatie van gunstige eigenschappen zoals symmetrie en een compacte drager toelieten. Een voorbeeld hiervan zijn de biorthogonale wavelets zoals geconstrueerd door Cohen, Daubechies en Feauveau [9].

Wavelet-packets vormen een uitbreiding van de wavelet-theorie: zij voorzien in een aanpasbare basis gebaseerd op het filterbankalgoritme, en vullen daarmee de ruimte tussen de standaard wavelet-ontbindingsboom en subband-codering.

Het liftingschema, ontwikkeld door Sweldens, ontstond als een methode om een gegeven discrete wavelet-transformatie te verbeteren met het oogmerk specifieke bijkomende eigenschappen te verkrijgen [48]. Later werd het ook een efficiënt algoritme om een willekeurige wavelet-transformatie te berekenen als een opeenvolging van eenvoudige liftingstappen [14]. Digitale signalen bestaan meestal uit een sequentie van gehele getallen, terwijl wavelet-transformaties als resultaat vlottende-kommagetallen geven. Om een efficiënte reversibele implementatie te verkrijgen is het van het grootste belang om over een algoritme te beschikken dat gehele getallen omzet in gehele getallen. Gelukkig kan een liftingstap op eenvoudige wijze worden aangepast om gehele getallen te transformeren, met behoud van de reversibiliteit [6]. Hierdoor werd het liftingschema een methode om reversibele gehele-getallen-wavelet-transformaties te implementeren.

Het liftingschema werd eveneens veralgemeend tot een methode om tweedegeneratie-wavelets te construeren [49]. Dit zijn wavelets die niet langer gegenereerd worden als translaties en dilaties van één wavelet-functie. Het liftingschema laat toe om wavelets te construeren op hoger-dimensionale roosters, onregelmatige bemonsteringen, triangularisaties, bollen, … [40, 31].

Wavelets worden gebruikt in tal van toepassingen, zoals signaal- en beeldverwerking, beeld- en videocompressie, wiskundige natuurkunde, numerieke analyse, communicatie, systeemtheorie, identificatie, geometrische modellering, computergrafiek, theoretisch fysica, benaderingstheorie, stochastische processen, …. Natuurlijk is deze lijst verre van compleet. We verwijzen naar de literatuur voor meer informatie, bvb. [3, 7, 8, 28, 29, 33, 36, 46, 58].

Wij concentreerden ons op twee toepassingsgebieden: beeldverwerking en compressie voor het creëren van laagdimensionale modellen voor dynamische systemen.

We werkten de details uit van gehele-getallen-wavelet-transformaties, op basis van het liftingschema, voor een klasse van biorthogonale wavelets (Cohen-Daubechies-Feauveau). Dit gebruikten we om de programmabibliotheek PIEF-PAK (WAILI) te ontwikkelen. Deze bibliotheek implementeert wavelet-transformaties en wavelet-gebaseerde beeldverwerkingsoperaties op tweedimensionale beelden [56]. Later voegden we ondersteuning toe voor zeer grote beelden en blokgebaseerde verwerking [55].

We construeerden een nieuw soort tweede-generatie-wavelets op een rechthoekig rooster, gebaseerd op een rood-zwart blokschema. Deze rood-zwart-wavelets zijn minder anisotroop dan tensorproduct-wavelets [52].

We reduceerden de complexiteit van de orthogonale eigenontbinding (POD) m.b.v. biorthogonale wavelet-packet-compressie en evalueerden de resulterende benaderende POD door de analyse van een grootschalig dynamisch systeem, beschreven door partiële differentiaalvergelijkingen [53].

1.2 Een overzicht van de thesis

Hoofdstuk 2 geeft een introductie tot de concepten multiresolutie-analyse en wavelets, bekeken vanuit het klassiek oogpunt. Het liftingschema, behandeld in Hoofdstuk 3, voorziet niet alleen in een kader voor de constructie van zogenaamde tweede-generatie-wavelets, maar het laat eveneens toe om de klassieke wavelet-transformaties te implementeren. Vergeleken met klassieke implementaties biedt het liftingschema verscheidene voordelen en extra eigenschappen, zoals bvb. een echte gehele-getallenvariante.

Het grootste deel van deze thesis is gewijd aan de toepassing van wavelets voor beeldverwerking. Vele beeldverwerkingsoperaties kunnen immers worden uitgevoerd in het wavelet-domein. Een aantal van deze bewerkingen komen aan bod in Hoofdstuk 4. Beeldcompressie is één van de meest belangrijke beeldverwerkingsoperaties. Het ligt voor de hand dat grote beelden best worden bewaard en behandeld in gecomprimeerde vorm. Wavelets vormen hier een oplossing aangezien wavelet-gebaseerde technieken betere compressieresultaten geven dan andere methoden.

Hoofdstuk 5 behandelt vervolgens het ontwerp en de kenmerken van *PIEF-PAK*, een programmabibliotheek die de gehele-getallen-wavelet-transformatie implementeert, zoals besproken in het vorige hoofdstuk. De bibliotheek laat wavelet-transformaties en wavelet-gebaseerde bewerkingen toe op tweedimensionale beelden en is geschreven in C++. In toepassingsgebieden zoals geografische informatiesystemen (GIS) worden beeldgroottes uitgedrukt in gigabytes en soms zelfs in terabytes. Hoofdstuk 6 beschrijft de uitbreiding van PIEFPAK tot een blokgebaseerde verwerking voor zulke grote beelden, wat een eventuele parallelle implementatie toelaat.

In Hoofdstuk 7 tonen we aan dat het liftingschema ook nuttig is voor de constructie van een nieuw soort tweede-generatie-wavelets op een rechthoekig rooster. Deze wavelets zijn gebaseerd op een rood-zwart blokschema en hebben een aantal interessante eigenschappen die niet mogelijk zijn bij tensorproducten van traditionele wavelets.

Wavelets hebben niet alleen toepassingen in beeld- en signaalverwerking, maar zijn ook van belang voor de constructie van laagdimensionale modellen voor dynamische systemen. De analyse van de originele partiële differentiaalvergelijkingen die het dynamisch systeem beschrijven kan worden vervangen door de analyse van een laagdimensionaal model dat de originele vergelijkingen benadert. De orthogonale eigenontbinding (Proper Orthogonal Decomposition — POD) laat toe om uitgaande van oplossingen van de partiële differentiaalvergelijkingen een "beste" basis te construeren voor zo'n model, maar dat is een dure operatie. In Hoofdstuk 8 stellen we een methode voor om de complexiteit van de POD te reduceren, gebruik makende van compressie m.b.v. biorthogonale wavelet-packets. We evalueren de hieruit voortvloeiende benaderende POD door een laagdimensionaal model te construeren voor een grootschalig dynamisch systeem.

1.3 Situering van het onderzoek

Het grootste deel van dit onderzoek werd uitgevoerd in het kader van het project "Wavelet-Based Interactive Video Communication and Image Database Consulting" (ITA/950244). Dit project betrok drie partners (Eurosense, Barco en K.U.Leuven) en had de volgende doelstellingen: de ontwikkeling van een programmabibliotheek voor wavelet-transformaties, met inbegrip van de ondersteuning van zeer grote beelden en beelden samengesteld uit deelbeelden, de implementatie van beeldcompressie en -verwerking, de integratie in een geografisch informatiesysteem (GIS), en een hardware-ondersteunde implementatie van de wavelet-transformatie voor reële-tijd-video. De ontwikkeling van de programmabibliotheek en de wavelet-gebaseerde beeldverwerkingsoperaties werden door ons uitgevoerd.

De onderzoeksresultaten uit Hoofdstuk 8, betreffende de benaderende POD, dateren van vóór het bovenvermelde project. Zij kaderen in het onderzoek naar de analyse van periodieke oplossingen van grootschalige dynamische systemen, beschreven door partiële differentiaalvergelijkingen, door andere leden van de onderzoeksgroep Technisch-Wetenschappelijk Rekenen van het departement Computerwetenschappen.

2 Wavelets

2.1 Wat zijn wavelets?

Het basisidee achter wavelet-analyse is de ontbinding van een signaal f in een basis van functies Ψ_i:

$$f = \sum_i a_i \Psi_i.$$

Om een efficiënte voorstelling voor f te bekomen met slechts een weinig coëfficiënten a_i is het zeer belangrijk om een geschikte familie van functies Ψ_i te gebruiken. Deze familie moet namelijk over eigenschappen beschikken die sterk overeenkomen met het signaal dat we wensen voor te stellen.

In realiteit zijn signalen meestal zowel beperkt in de tijd (of ruimte, in het geval van beelden) als in frequentie. Wavelets ("golfjes") vormen een compromis tussen functies die ofwel enkel beperkt zijn in de tijd, ofwel enkel in frequentie. Ze combineren dus het beste uit twee werelden.

2.2 Het waarom van wavelets

Eén van de belangrijkste eigenschappen van wavelets is dat ze goede decorrelatie-eigenschappen bezitten:

- Wavelets zijn gelokaliseerd in zowel ruimte/tijd als in schaal/frequentie. Zij slagen er dus in lokale eigenschappen van een signaal te detecteren.

- Wavelets zijn gebaseerd op een multiresolutie-analyse. M.b.v. een wavelet-ontbinding kan men een signaal analyseren op verschillende resolutieniveaus of schalen.

- Wavelets zijn voldoende zachtverlopend. Zachtverlopende signalen kunnen dus goed worden benaderd met een beperkt aantal basisfuncties.

Bovendien kunnen de wavelet-transformatie en haar inverse berekend worden m.b.v. snelle en stabiele algoritmen.

2.3 Wavelets en multiresolutie-analyse

Klassiek worden discrete wavelets geïntroduceerd m.b.v. het concept multiresolutie-analyse.

Multiresolutie-analyse

In een multiresolutie-analyse [34] wordt de ruimte $\mathbf{L}^2$, de vectorruimte der kwadratisch integreerbare functies in $\mathbf{R}$, ontbonden in geneste deelruimten V_j ($V_j \subset V_{j+1}$). De sluiting van de unie van deze deelruimten is $\mathbf{L}^2$ en hun doorsnede bevat alleen de nulfunctie. In het dyadische geval heeft een functie $f(x)$ die behoort tot V_j de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} f(x) \in V_j \quad &\Leftrightarrow \quad \text{dilatie } f(2x) \in V_{j+1}, \\ f(x) \in V_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{translatie } f(x+1) \in V_0. \end{aligned}$$

Indien we een functie $\varphi(x) \in V_0$ kunnen vinden zodanig dat

$$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

een basis vormt voor de ruimte V_0, dan noemen we dit een *schaalfunctie*. Voor de andere deelruimten V_j (met $j \neq 0$) definiëren we:

$$\varphi_{j,k}(x) \equiv 2^{j/2}\varphi\big(2^j x - k\big)\,.$$

Wavelet-functies

Aangezien de deelruimten V_j genest zijn kan men V_{j+1} ontbinden in V_j en W_j, met W_j het orthogonale complement van V_j in V_{j+1}:

$$\begin{aligned} V_j \oplus W_j \quad &= \quad V_{j+1}, \\ W_j \quad &\perp \quad V_j. \end{aligned}$$

De sluiting van de directe som van de deelruimten W_j is opnieuw gelijk aan $\mathbf{L}^2$. Dit betekent dat V_j een "grove resolutie"-voorstelling is van V_{j+1}, terwijl W_j het "fijne resolutie"-verschil tussen V_j en V_{j+1} bevat.

Indien we een functie $\psi(x) \in W_0$ kunnen vinden die voldoet aan de translatievergelijking

$$\psi(x) \in W_0 \Leftrightarrow \text{translatie } \psi(x+1) \in W_0,$$

en waarbij

$$\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

een basis vormt voor de ruimte W_0, dan noemen we dit een *wavelet-functie*. Voor de andere deelruimten W_j (met $j \neq 0$) definiëren we:

$$\psi_{j,k}(x) \equiv 2^{j/2}\psi\big(2^j x - k\big)\,.$$

De snelle wavelet-transformatie

Aangezien zowel V_0 en W_0 deelruimten zijn van V_1 kunnen we $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ uitdrukken in functie van de basisfuncties van V_1:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 2\sum_k h_k\,\varphi(2x-k),\\ \psi(x) &= 2\sum_k g_k\,\varphi(2x-k).\end{aligned}$$

Dankzij de multiresolutie-analyse zijn deze verbanden ook geldig tussen V_{j+1}, V_j en W_j voor een willekeurige j. We noemen de coëfficiënten h_k en g_k de filtercoëfficiënten. Vermits $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ kunnen we een functie

$$f(x) = \sum_k \lambda_{j+1,k}\,\varphi_{j+1,k}(x)$$

ook ontbinden als

$$f(x) = \sum_l \lambda_{j,l}\,\varphi_{j,l}(x) + \sum_l \gamma_{j,l}\,\psi_{j,l}(x).$$

waarbij de transformatiecoëfficiënten $\lambda_{j,l}$ en $\gamma_{j,l}$ gedefinieerd zijn als

$$\begin{aligned}\lambda_{j,l} &= \sqrt{2}\sum_k h_{k-2l}\,\lambda_{j+1,k},\\ \gamma_{j,l} &= \sqrt{2}\sum_k g_{k-2l}\,\lambda_{j+1,k}.\end{aligned}$$

Deze operatie staat bekend als de *snelle wavelet-transformatie* (Fast Wavelet Transform — FWT) en heeft een complexiteit evenredig met de signaallengte ($O(n)$). De filters h_k en g_k zijn laag-doorlaat- respectievelijk hoog-doorlaatfilters. De inverse transformatie gebeurt op een analoge wijze. Dit algoritme wordt het filterbankalgoritme genoemd.

Orthogonale wavelets

Als de functies $\varphi_{j,k}(x)$ en $\psi_{j,k}(x)$ orthonormaal staan t.o.v. elkaar:

$$\langle \varphi_{j,l}, \varphi_{j,l'} \rangle = \delta_{l-l'} \qquad \text{en} \qquad \langle \psi_{j,l}, \psi_{j',l'} \rangle = \delta_{j-j'}\,\delta_{l-l'},$$

is de ontbinding in de wavelet-basis stabiel en kunnen de wavelet-coëfficiënten berekend worden als inwendige producten met de basisfuncties:

$$\lambda_{j,l} = \langle f, \varphi_{j,l} \rangle \qquad \text{en} \qquad \gamma_{j,l} = \langle f, \psi_{j,l} \rangle.$$

Voor deze ontbinding geldt de gelijkheid van Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_k \lambda_{j+1,k}^2 = \sum_l \lambda_{j,l}^2 + \sum_l \gamma_{j,l}^2.$$

Biorthogonale wavelets

Men kan wavelets creëren met bepaalde extra eigenschappen door de orthogonaleitsvoorwaarde te laten vallen. In het biorthogonale geval hebben we twee multiresolutie-analyses, een primale (V_j, W_j, $\varphi_{j,k}$, $\psi_{j,k}$) en een duale ($\widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j$, $\widetilde{\varphi}_{j,k}$, $\widetilde{\psi}_{j,k}$), met

$$\langle \widetilde{\varphi}_{j,l}, \varphi_{j,l'} \rangle = \delta_{l-l'} \qquad \text{en} \qquad \langle \widetilde{\psi}_{j,l}, \psi_{j',l'} \rangle = \delta_{j-j'} \delta_{l-l'}.$$

De ontbinding in een biorthogonale wavelet-basis is nog steeds stabiel omdat biorthogonale wavelets een Riesz-basis vormen:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_l \lambda_{j,l}^2 + \sum_l \gamma_{j,l}^2 \leq B\|f\|^2,$$

met A en B positieve constanten. De wavelet-coëfficiënten worden nu berekend als inwendige producten met de duale basisfuncties:

$$\lambda_{j,l} = \langle f, \widetilde{\varphi}_{j,l} \rangle \qquad \text{en} \qquad \gamma_{j,l} = \langle f, \widetilde{\psi}_{j,l} \rangle.$$

Het filterbankalgoritme is nog steeds bruikbaar, op voorwaarde dat we het duale filterpaar $(\widetilde{h}, \widetilde{g})$ gebruiken voor de ontbinding en het primale filterpaar (h, g) voor de reconstructie.

De wavelet-ontbindingsboom

Aangezien V_j telkens wordt opgesplitst in V_{j-1} en W_{j-1} krijgen we een ontbindingsboom. De totale kost van deze ontbinding is nog steeds $O(n)$ omdat de hoeveelheid rekenwerk wordt gehalveerd op elk volgend resolutieniveau.

Hogere dimensies

Bovenstaande wavelets werden gedefinieerd op de reëele as $\mathbf{R}$; dit is een ééndimensionaal domein. Men kan hoger-dimensionale wavelets creëren als tensorproducten van ééndimensionale wavelets. Echte multidimensionale wavelets, bvb. rood-zwart-wavelets, vormen een valabel alternatief.

2.4 De wavelet-transformatie en translatie-invariantie

Een wavelet-transformatie is niet translatie-invariant omwille van de decimatiestap in het filterbankalgoritme. De transformatie is slechts translatie-invariant indien het (discreet) signaal vertraagd of versneld wordt met een veelvoud van 2^n, met n het aantal transformatieniveaus.

2.5 De redundante wavelet-transformatie

De redundante wavelet-transformatie is een variante van de wavelet-transformatie zonder decimatiestap. Ze heeft als voordeel dat ze wel translatie-invariant is, ten koste van meer rekenwerk, hogere geheugenvereisten $O(n \log n)$ en een meer complexe inverse transformatie.

2.6 Wavelet-packets

In elke stap van een wavelet-transformatie wordt het laagfrequente deel van het signaal opgesplitst in een laag- en een hoogfrequent deel. Bij een wavelet-packet-transformatie wordt ook het hoogfrequente deel verder opgesplitst, wat leidt tot een redundante boom van mogelijke basisfuncties [10]. Een wavelet-packet-transformatie heeft een complexiteit van $O(n \log n)$.

Het doel van wavelet-packets is het vinden van een "beste basis", d.w.z. het vinden van de verzameling basisfuncties die de gegevens het beste decorreleert [61]. De selectie van de beste basis gebeurt aan de hand van een kostfunctie die berekent hoeveel bits nodig zijn om de gegevens voor te stellen in een specifieke basis.

3 Het liftingschema

Het liftingschema is een efficiënt algoritme om wavelet-transformaties te berekenen. Oorspronkelijk werd het ontwikkeld om een gegeven wavelet-transformatie te verbeteren tot ze aan bepaalde eigenschappen voldeed. Later werd het liftingschema uitgebreid tot een algemene methode om tweede-generatie-wavelets te creëren. Deze zijn meer flexibel en laten toe om wavelets te definiëren op intervallen, onregelmatige roosters, ...

Men kan alle traditionele wavelet-transformaties implementeren m.b.v. het liftingschema. De ontbinding van een klassieke wavelet-filter in liftingstappen kan eenvoudig bekomen worden via een Euclidisch algoritme.

De theorie achter de constructie van wavelets in het vorige hoofdstuk steunt zeer sterk op Fourieranalyse. Het liftingschema daarentegen introduceert wavelets zonder gebruik te maken van het concept Fourier-transformatie. Hierdoor wordt het heel wat eenvoudiger om de basisprincipes achter wavelets uit te leggen [48, 49, 40, 47].

3.1 Voorspellen en bijsturen

De wavelet-transformatie van een ééndimensionaal discreet signaal is een multiresolutie-voorstelling, met als basisfuncties wavelets. Op elk resolutieniveau wordt (het laagfrequente deel van) het signaal opgesplitst in een hoog- en een laagfrequent deel, gebruik makende van corresponderende wavelet-filters.

Het liftingschema is een efficiënte implementatie van deze filteroperaties. Veronderstel dat de verzameling λ_{j+1} het laagfrequent deel van een signaal op resolutieniveau $j+1$ vormt. Deze verzameling wordt opgesplitst in twee andere verzamelingen op niveau j: een laagfrequent deel λ_j en een hoogfrequent deel γ_j. Traditioneel bestaat deze opsplitsing uit een splitsing in even en oneven monsters: de luie wavelet-transformatie.

Liftingstappen worden meestal in paren uitgevoerd. Een duale liftingstap is een predictie: de gegevens γ_j worden voorspeld uitgaande van de λ_j. Zulke voorspelling is een goede benadering als er een hoge correlatie is tussen de twee signalen, zodat γ_j kan vervangen worden door de predictiefout $\gamma_j - \mathcal{P}(\lambda_j)$, waarbij $\mathcal{P}$ de predictieoperator voorstelt. Dit is de decorrelerende stap.

Het originele signaal had echter een aantal eigenschappen die verloren gegaan zijn bij de overgang naar de nieuwe voorstelling, zoals bvb. het behoud van de gemiddelde waarde. Om deze eigenschappen te herstellen heeft men een primale liftingstap nodig, waarbij de verzameling λ_j wordt bijgestuurd m.b.v. gegevens berekend uit γ_j. Dus λ_j wordt vervangen door $\lambda_j + \mathcal{U}(\gamma_j)$, met $\mathcal{U}$ een bijsturingsoperator.

In het algemene geval kunnen meerdere liftingstappen worden uitgevoerd bij de overgang van resolutieniveau $j+1$ naar niveau j. Via een iteratie op λ_j worden deze stappen herhaald uitgevoerd en verkrijgt men een multiresolutie-ontbindingsboom.

De inverse transformatie

De inverse transformatie van het liftingschema is zeer eenvoudig te vinden. Een wavelet-transformatie wordt immers ontbonden in een aantal elementaire stappen die elk op zich eenvoudig te inverteren zijn. Dus de inverse transformatie luidt als volgt: keer de volgorde van de stappen om, inverteer de tekens in de liftingstappen en vervang de opsplitsingen door samenvoegingen.

Voorbeeld: lineaire voorspelling

De transformatie van een discreet ééndimensionaal signaal $x = \{x_k\}$ gaat als volgt:

Splitsing Splits het signaal x (d.w.z. λ_{j+1}) in even (d.w.z. λ_j) en oneven monsters (d.w.z. γ_j). Dit noemt men de luie wavelet-transformatie:

$$\begin{aligned} s_i &\leftarrow x_{2i}, \\ d_i &\leftarrow x_{2i+1} \end{aligned}$$

Predictie Voorspel de oneven monsters m.b.v. lineaire interpolatie:

$$d_i \leftarrow d_i - \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1}).$$

Bijsturing Pas de even monsters aan om de gemiddelde waarde van het signaal te behouden:

$$s_i \leftarrow s_i + \frac{1}{4}(d_{i-1} + d_i).$$

Hierna vormt het signaal $s = \{s_k\}$ een grove voorstelling van het originele signaal x, terwijl $d = \{d_k\}$ de hoogfrequente informatie bevat die verloren ging bij de overgang van niveau $j+1$ naar j. Meer geavanceerde interpolatieschema's zijn mogelijk en leiden tot andere wavelets [50].

Deze transformatie werkt enkel op ééndimensionale gegevens. Voor twee dimensies kan men ze toepassen op de rijen en kolommen van een matrix, met een tensorproduct-wavelet-transformatie tot gevolg.

Later zullen we zien dat het bovenstaande voorbeeld het lifting-equivalent is van de populaire Cohen-Daubechies-Feauveau biorthogonale wavelets met twee nulmomenten voor zowel de primale als de duale wavelet (CDF $(2,2)$ wavelet) [9].

Flexibiliteit

Het liftingschema is veel flexibeler dan klassieke methodes voor de constructie van wavelets. Dankzij lifting kan men wavelets construeren voor hoge dimensies, op onregelmatige bemonsteringen, intervallen, triangularisaties, … [40].

In Hoofdstuk 7.1 presenteren we een eenvoudige methode om tweedimensionale wavelets te construeren op een rechthoekig rooster m.b.v. het liftingschema.

3.2 Eenmaking van de twee modellen

Alle klassieke wavelet-transformaties kunnen worden geïmplementeerd m.b.v. het liftingschema.

De polyfasevoorstelling

De z-transformatie van een signaal $x = \{x_k\}$ wordt gedefinieerd als $x(z) = \sum_k x_k z^{-k}$. De z-transformatie van een eindig filter $h = \{h_{k_b}, \ldots, h_{k_e}\}$ is een Laurent-veelterm $h(z) = \sum_{k=k_b}^{k_e} h_k z^{-k}$.

Als we de opsplitsing van $x(z)$ in haar even en oneven componenten $x_e(z^2)$ en $x_o(z^2)$ definiëren als

$$x_e(z^2) = \frac{x(z) + x(-z)}{2} \qquad \text{en} \qquad x_o(z^2) = \frac{z}{2}\left[x(z) - x(-z)\right],$$

kunnen we het filterbankalgoritme in het z-domein schrijven als

$$\begin{bmatrix} \lambda(z) \\ \gamma(z) \end{bmatrix} = P(z) \begin{bmatrix} x_e(z) \\ z^{-1}x_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_e(z) & h_o(z) \\ g_e(z) & g_o(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(z) \\ z^{-1}x_o(z) \end{bmatrix},$$

waarbij $x(z)$ het invoersignaal voorstelt en $\lambda(z)$ en $\gamma(z)$ de resulterende laag- respectievelijk hoogfrequente uitvoersignalen zijn. $P(z)$ wordt de polyfasematrix genoemd en bepaalt welke wavelet-transformatie wordt uitgevoerd. De polyfasematrix horende bij de luie wavelet-transformatie is de 2×2 eenheidsmatrix.

Primale en duale lifting

Het liftingschema [48, 49, 47] vindt zijn oorsprong in een methode om een gegeven wavelet-transformatie te verbeteren, met het oogmerk wavelets met specifieke eigenschappen te bekomen.

Bij primale (duale) lifting creëert men een nieuwe filter h^{nieuw} (g^{nieuw}), uitgaande van een filterpaar (h,g):

$$\begin{aligned} h^{\text{nieuw}}(z) &= h(z) + s(z^2)g(z), \\ g^{\text{nieuw}}(z) &= g(z) + t(z^2)h(z). \end{aligned}$$

M.b.v. de polyfasevoorstelling wordt dit:

$$P^{\text{nieuw}}(z) = \begin{bmatrix} h_e^{\text{nieuw}}(z) & h_o^{\text{nieuw}}(z) \\ g_e(z) & g_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_e(z) & h_o(z) \\ g_e(z) & g_o(z) \end{bmatrix},$$

respectievelijk

$$P^{\text{nieuw}}(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & h_o(z) \\ g_e^{\text{nieuw}}(z) & g_o^{\text{nieuw}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_e(z) & h_o(z) \\ g_e(z) & g_o(z) \end{bmatrix}.$$

Dit proces kan men herhalen om een aaneensluiting van alternerende primale en duale liftingstappen te bekomen. Indien de initiële matrix $P(z)$ de eenheidsmatrix is — d.w.z. de eerste stap is een luie wavelet-transformatie — dan krijgen we een product van 2×2 boven- en benedendriehoeksmatrices, bestaande uit Laurent-veeltermen.

Ontbinding in liftingstappen

Daubechies en Sweldens [14] bewezen dat elke polyfasematrix die een wavelet-transformatie met eindige filters voorstelt kan ontbonden worden in een product van 2×2 boven- en benedendriehoeksmatrices en een diagonaalmatrix:

$$P(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}}_{\text{normalisatie}} \prod_{i=m}^{1} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{primale lifting}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix}}_{\text{duale lifting}} \right\}, \tag{1}$$

met $s_i(z)$ en $t_i(z)$ Laurent-veeltermen en K_1 en K_2 normalisatiefactoren. Men kan bewijzen dat alle wavelet-transformaties kunnen worden uitgevoerd als een luie wavelet-transformatie, gevolgd door een afwisseling van primale en duale liftingstappen en een normalisatie. Hieruit volgt onmiddellijk de inverse transformatie:

$$P^{-1}(z) = \prod_{i=1}^{m} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1/K_1 & 0 \\ 0 & 1/K_2 \end{bmatrix}.$$

De gezochte $s_i(z)$ en $t_i(z)$ kan men vinden door een Euclidisch algoritme uit te voeren op de even en oneven delen van de wavelet-filters [14]. We geven de ontbindingen voor een aantal wavelet-transformaties uit de biorthogonale familie van Cohen-Daubechies-Feauveau.

Voordelen van het liftingschema

Wavelet-transformaties uitgevoerd m.b.v. het liftingschema bieden een aantal voordelen t.o.v. het klassieke filterbankalgoritme:

- Het liftingschema is sneller (maar natuurlijk nog steeds $O(n)$).
- De inverse transformatie is triviaal.
- Het liftingschema is eenvoudiger te begrijpen en te implementeren.
- Het liftingschema is meer algemeen en laat de constructie van tweede-generatie-wavelets toe.

Bovendien kunnen alle klassieke wavelet-transformaties worden geïmplementeerd m.b.v. het liftingschema, via het algoritme van Euclides. Dit algoritme vormt dus de brug tussen de klassieke wavelet-transformatie en het liftingschema.

3.3 De gehele-getallen-wavelet-transformatie

In vele toepassingen (bvb. beeldcompressie en -verwerking, video, audio, ...) zijn de invoergegevens gehele getallen. Bovendien zijn gehele getallen eenvoudiger te bewaren en encoderen dan vlottende-kommagetallen. Alle bovenstaande transformaties veronderstellen echter dat het invoersignaal vlottende-kommagetallen bevat. Maar zelfs als de filteroperaties worden uitgevoerd op gehele getallen verkrijgt men hierdoor rationale of reële getallen omdat de filtercoëfficiënten niet noodzakelijk geheel zijn. Om een efficiënte implementatie van de discrete wavelet-transformatie te bekomen is het dus van het grootste belang dat ook de wavelet-coëfficiënten geheel zijn (eventueel op een schaalfactor na). Dit kan niet gebeuren door de coëfficiënten eenvoudigweg af te ronden, aangezien het hierna niet meer mogelijk is het oorspronkelijke signaal te reconstrueren.

Gehele-getallentransformaties

Gelukkig kan het liftingschema eenvoudig gewijzigd worden tot een transformatie die gehele getallen omzet in gehele getallen en die bovendien perfect omkeerbaar is [6, 57]. Hiervoor worden een aantal afrondingsoperaties toegevoegd, aangeduid door accolades. In de predictie- en bijsturingsstappen berekenen we nu afgeronde getallen:

$$\gamma_j \leftarrow \gamma_j - \left\{ \mathcal{P}(\lambda_j) \right\} \qquad \text{en} \qquad \lambda_j \leftarrow \lambda_j + \left\{ \mathcal{U}(\gamma_j) \right\}.$$

Aangezien een operatie van de vorm

$$a^{\text{nieuw}} \leftarrow a^{\text{oud}} + \{b\}$$

b niet verandert, onafhankelijk van de gebruikte afrondingsmethode, kan a^{oud} altijd worden gereconstrueerd zonder enige fout als

$$a^{\text{oud}} \leftarrow a^{\text{nieuw}} - \{b\}.$$

De inverse operatie wordt nu:

$$\lambda_j \leftarrow \lambda_j - \left\{ \mathcal{U}(\gamma_j) \right\} \qquad \text{en} \qquad \gamma_j \leftarrow \gamma_j + \left\{ \mathcal{P}(\lambda_j) \right\}.$$

Voorbeeld: CDF $(2,2)$.

Voorwaartse transformatie		**Inverse transformatie**	
Splitsing:	$s_i \leftarrow x_{2i}$ $d_i \leftarrow x_{2i+1}$	Inverse primale lifting:	$s_i \leftarrow s_i - \left\{ \frac{1}{4}(d_{i-1} + d_i) \right\}$
Duale lifting:	$d_i \leftarrow d_i - \left\{ \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1}) \right\}$	Inverse duale lifting:	$d_i \leftarrow d_i + \left\{ \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1}) \right\}$
Primale lifting:	$s_i \leftarrow s_i + \left\{ \frac{1}{4}(d_{i-1} + d_i) \right\}$	Samenvoeging:	$x_{2i} \leftarrow s_i$ $x_{2i+1} \leftarrow d_i$

Normalisatie

In het bovenstaande voorbeeld hebben we de normalisatiefactoren K_1 en K_2 verwaarloosd. In toepassingen zoals beeldcompressie moet men echter wel degelijk rekening houden met de werkelijke genormaliseerde grootte van de waveletcoëfficiënten.

3.4 Behandeling van randen

In de praktijk strekken signalen zich niet oneindig ver uit in ruimte of tijd, maar zijn ze beperkt tot een eindig interval. Aangezien het filterbankalgoritme een oneindige signaallengte veronderstelt moet het eindige signaal worden uitgebreid. Klassiek gebruikt men hiervoor periodieke of symmetrisch extensie, waarbij symmetrische extensie betere resultaten geeft omdat ze discontinuïteiten vermijdt [4].

Het liftingschema biedt de mogelijkheid om wavelets te construeren die gedefinieerd zijn op een interval. Nochtans hebben wij niet gekozen voor deze optie, maar voor symmetrische extensie omdat dit eenvoudiger te implementeren is en ruimschoots voldoende is voor onze toepassingen. Bovendien laat het liftingschema symmetrische uitbreiding toe met alle soorten wavelets, en niet alleen met symmetrische wavelets.

3.5 Conclusies

Het liftingschema laat een efficiënte implementatie van een reversibele gehele-getallen-wavelet-transformatie toe. Alle klassieke wavelet-transformaties kunnen worden uitgevoerd m.b.v. het liftingschema. We hebben de details uitgewerkt van een gehele-getallen-wavelet-transformatie voor een bepaalde klasse van biorthogonale wavelets (Cohen-Daubechies-Feauveau).

4 Wavelet-gebaseerde beeldverwerking

4.1 Digitale beelden

In een computersysteem worden grijswaardenbeelden voorgesteld door een matrix. Elk matrixelement bepaalt de helderheid van een beeldpunt in het beeld. Kleurenbeelden bestaan uit meerdere matrices, één voor elke kleurencomponent (bvb. rood, groen en blauw): de kleur van een beeldpunt wordt nu bepaald door de corresponderende elementen in elke matrix.

4.2 Ruisverwijdering met wavelets

Ruisverwijdering is een belangrijke toepassing van wavelets.

Een wavelet-gebaseerde ruisverwijderingsmethode werkt als volgt: eerst wordt het signaal of beeld getransformeerd m.b.v. een discrete wavelet-transformatie, daarna worden de wavelet-coëfficiënten gemanipuleerd, gevolgd door een inverse wavelet-transformatie. Of een coëfficiënt gemanipuleerd wordt of niet hangt ervan af of hij beïnvloed is door ruis. Eerst moet men dus bepalen welke coëfficiënten ruis bevatten.

De meest voor de hand liggende methode gebruikt de absolute waarde van een wavelet-coëfficiënt als regulariteitsmaat: een kleine coëfficiënt bevat weinig informatie en dus hoofdzakelijk ruis, een grote coëfficiënt bevat veel informatie en weinig ruis. M.b.v. drempelmaskering kan men dus de kleine ruizige coëfficiënten verwijderen. Hiervan bestaan twee varianten: bij harde drempelmaskering worden enkel de kleine coëfficiënten vervangen door nul, bij zachte drempelmaskering wordt de grootte van de grote coëfficiënten verminderd met de drempelwaarde.

Meestal is zachte drempelmaskering te verkiezen omdat het een meer continue operatie is.

Voor de selectie van de drempelwaarde nemen we het minimum van de "veralgemeende kruisvalidatie"-functie, gebaseerd op het werk van Jansen [60, 24, 23, 25]. Deze methode is asymptotisch optimaal: voor voldoende grote beelden geeft ze dus zeer goede resultaten.

4.3 Schalering van beelden

Na één stap van de discrete wavelet-transformatie van een beeld is de laagfrequente subband een verkleinde versie (met factor 2) van het originele beeld. Men kan een wavelet-transformatie dus ook gebruiken om beelden te verkleinen met een factor 2^n. Omwille van het filteren met een laag-doorlaatfilter treedt er geen vouwvervorming op.

Bijgevolg kan men beelden ook vergroten met een factor 2^n m.b.v. een inverse wavelet-transformatie, waarbij de wavelet-coëfficiënten van de toegevoegde hoogfrequente subbanden op nul gezet worden. Dit geeft betere resultaten dan eenvoudige beeldpuntduplicatie omdat er geen blokeffect optreedt.

Indien de schaalfactor geen macht van twee is voegen we een extra interpolatiestap toe [62].

4.4 Knip- en plakwerk

In het ruimtedomein is het zeer eenvoudig om een rechthoekig deel van een beeld uit te knippen. Ondanks de lokaliteit van wavelets is dit echter veel moeilijker in het wavelet-domein: de wavelet-transformatie is immers niet translatie-invariant. Vermits knip- en plakoperaties belangrijk zijn hebben we dit probleem omzeild, zoals aangegeven in Hoofdstuk 5.2.

4.5 Beeldcompressie

We gebruiken steeds meer digitale beelden in multimediatoepassingen. Bovendien worden digitale beelden steeds groter. Omwille van de grote opslag- en transmissiekost van digitale beelden is er een sterke behoefte aan beeldcompressie.

Omwille van hun goede decorrelatie-eigenschappen zijn wavelets een sleuteltechnologie voor beeldcompressie: ze laten goede compressieverhoudingen toe met behoud van een goede beeldkwaliteit [15, 5]. Vooral voor hoge compressieverhoudingen geven wavelet-gebaseerde methoden veel betere resultaten dan concurrerende technieken. Vergeleken met JPEG [59] vertonen ze geen storende blokeffecten.

De multiresolutie-eigenschappen van wavelets bieden een aantal extra mogelijkheden, zoals progressieve transmissie en inzoomen.

Beeldcompressietechnieken op basis van wavelets maken meestal gebruik van nulboomcodering [42, 39].

5 Ontwerp van de programmabibliotheek PIEFPAK

PIEFPAK (WAILI — Wavelets with Integer Lifting) is een programmabibliotheek voor wavelet-transformaties en wavelet-gebaseerde operaties op tweedimensionale beelden [57]. We ontwikkelden PIEFPAK in het kader van het project "Wavelet-Based Interactive Video Communication and Image Database Consulting".

De broncode van PIEFPAK is beschikbaar voor onderzoeksdoeleinden [56]. Momenteel is PIEFPAK in gebruik bij ca. 250 onderzoeksinstellingen.

5.1 Ontwerpcriteria

Het liftingschema

PIEFPAK implementeert de tweedimensionale tensorproduct-wavelet-transformatie, gebaseerd op de gehele-getallenversie van het liftingschema. Beelden kunnen meerdere kanalen bevatten (bvb. RGB of YUV), eventueel elk met een andere (willekeurige) grootte. Alle berekeningen gebeuren met 16-bit invoer- en uitvoergegevens. Dit is voldoende voor toepassingen met 8-bit invoerbeelden.

Cohen-Daubechies-Feauveau biorthogonale wavelets

We kozen voor een aantal wavelets uit de biorthogonale familie van Cohen-Daubechies-Feauveau omwille van hun eigenschappen [9]:

- Ze hebben een compacte drager zodat lokale beeldeigenschappen behouden blijven.

- De schaalfunctie is altijd symmetrisch, terwijl de wavelet-functie ofwel symmetrisch, ofwel antisymmetrisch is. Symmetrie is belangrijk voor beeldverwerking omdat de detectie van beeldeigenschappen dan niet afhankelijk is van de oriëntatie.

- Ze hebben dyadische filtercoëfficiënten ($z/2^n$, met $z \in \mathbf{Z}$ en $n \in \mathbf{N}$). Dit vergemakkelijkt de implementatie.

Natuurlijk kan de bibliotheek eenvoudig uitgebreid worden met andere wavelets, op voorwaarde dat men de beschikking heeft over een ontbinding in liftingstappen.

Restricties voor de beeldgrootte

In het ideale geval bevatten digitale signalen 2^n monsters. Dit is het enige geval waarbij men n opeenvolgende niveaus van een wavelet-transformatie kan uitvoeren, waarbij de laagfrequente en hoogfrequente subbanden op elk resolutieniveau hetzelfde aantal monsters tellen. Uitgebreid naar twee dimensies zijn ideale beelden vierkant, met zijde 2^n beeldpunten. In de praktijk zijn beelden rechthoekig, met willekeurige grootte, wat de implementatie heel wat complexer maakt. PIEFPAK ondersteunt willekeurige beeldgroottes.

Beelden en hun wavelet-transformatie

Het uitvoeren van wavelet-transformaties op beelden vergt interactie tussen een aantal componenten (C++-klassen):

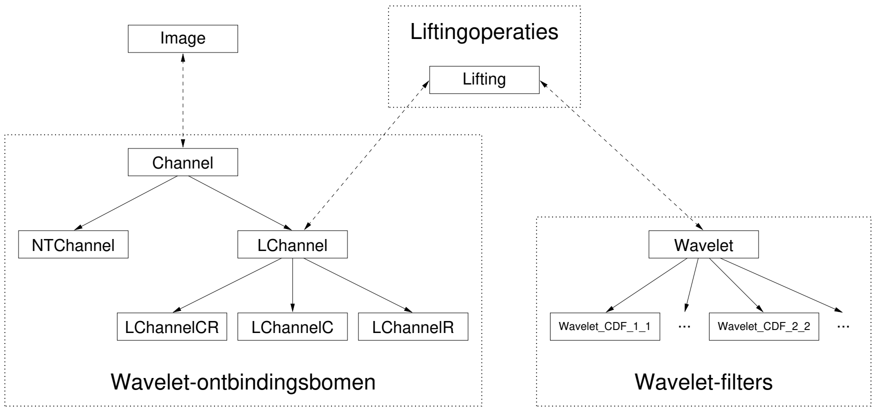
Image Een *Image* is een beeld, bestaande uit een aantal onafhankelijke kanalen.

Channel Een *Channel* is een kanaal van een beeld en vormt het basisblok van PIEFPAK. Een kanaal kan niet-getransformeerd zijn (een *NTChannel*) of wavelet-getransformeerd (een *LChannel*). Omwille van de multiresolutie bevat een LChannel een aantal subbanden, welke opnieuw Channels zijn. Het aantal subbanden hangt af van het type transformatie (kolommen en rijen (*LChannelCR*), alleen kolommen (*LChannelC*) of alleen rijen (*LChannelR*)).

Wavelet Een *Wavelet* stelt de wavelet-filters en liftingstappen voor horende bij een specifieke wavelettransformatie. Verschillende soorten wavelet-transformaties worden geïmplementeerd door overerving. Een aantal transformaties uit de familie van Cohen-Daubechies-Feauveau zijn beschikbaar, maar men kan gemakkelijk andere wavelet-transformaties toevoegen.

Lifting Een *Lifting*-object voert liftingstappen uit. Dankzij de object-georiënteerde aard van C++ kan men eventueel geoptimaliseerde versies voor specifieke wavelet-transformaties toevoegen.

De relaties tussen de belangrijkste componenten van WAILI worden getoond in onderstaande figuur:



5.2 Wavelet-gebaseerde bewerkingen

PIEFPAK bevat een aantal beeldverwerkingsoperaties gebaseerd op wavelets.

Knip- en plakoperaties op wavelet-getransformeerde beelden

De wavelet- en schaalfuncties zijn gelokaliseerd in zowel het ruimtelijk als het frequentiedomein. Als men een rechthoekig gedeelte B wil uitknippen uit een beeld A kan men gebruik maken van de ruimtelijk lokaliteit van de basisfuncties. Op elk resolutieniveau zijn er dus slechts een beperkt aantal extra wavelet-coëfficiënten nodig omwille van de overlappende basisfuncties aan de randen van B. M.b.v. deze techniek implementeerden we op efficiënte wijze knip- en plakoperaties op wavelet-getransformeerde beelden.

De wavelet-transformatie is echter niet translatie-invariant. Om dit probleem te omzeilen introduceerden we globale coördinaten voor beelden. Op elk resolutieniveau bepaalt de pariteit van de coördinaten of een beeldpunt tijdens de splitsingsstap van het liftingschema zal terechtkomen in de “even” of in de “oneven” partitie. Hierdoor is het mogelijk knip- en plakoperaties uit te voeren zonder het deelbeeld te hertransformeren, op voorwaarde dat de coördinaten van de (deel)beelden op voorhand bekend zijn. Dit is het geval in een aantal GIS-toepassingen.

Het schaleren van beelden

Een wavelet-transformatie kan gebruikt worden om beelden te verkleinen met een factor 2^n; haar inverse om ze te vergroten met een factor 2^n. Voor andere schaalfactoren maken we gebruik van een extra interpolatiestap.

Ruisverwijdering

Zachte drempelmaskering met een drempelwaarde bepaald door veralgemeende kruisvalidatie is een efficiënte en performante ruisverwijderingstechniek.

5.3 Implementatieaspecten

"In place"-ordening versus Mallat-ordening

Het liftingschema laat toe om een wavelet-transformatie "in place" te berekenen. Dit heeft als voordeel dat minder geheugen nodig is, echter het resulteert in een minder gunstige ordening van de waveletcoëfficiënten: coëfficiënten uit dezelfde subband zitten verspreid in het geheugen.

De tweedimensionale tensorproduct-wavelet-transformatie van een matrix houdt in dat zowel de kolommen als de rijen van de matrix worden getransformeerd m.b.v. de ééndimensionale transformatie. Als de waveletcoëfficiënten georganiseerd worden in het geheugen per subband krijgt men de "Mallat"-ordening [35]. Deze ordening is interessant indien men gebruik wenst te maken van de multiresolutie-eigenschappen van een wavelet-transformatie. Voor PIEFPAK verkozen we dus de Mallat-ordening boven de "in place"-ordening.

Normalisatie van de wavelet-coëfficiënten

In het ideale geval is de normalisatiefactor K_1 (zie Vergelijking 1) voor de laagfrequente gegevens altijd $\sqrt{2}$. In dat geval blijft het dynamisch bereik van de waveletcoëfficiënten in de laagfrequente subbanden immers steeds gelijk.

Natuurlijk moet men rekening houden met de accumulatie van de normalisatiefactoren voor opeenvolgende resolutieniveaus. De werkelijke waarde x van een waveletcoëfficiënt kunnen we schrijven als $x = m \cdot (\sqrt{2})^e$, met m de coëfficiënt na transformatie en e een "shift".

5.4 Samenvatting van de functionaliteit van PIEFPAK

Samengevat biedt PIEFPAK de volgende functionaliteit:

Wavelet-transformaties Wavelet-transformaties gebaseerd op de gehele-getallenvariant van het liftingschema. Men kan zowel de kolommen als de rijen van een beeld transformeren, of enkel de kolommen of rijen.

Beeldverwerkingsoperaties Knip- en plakoperaties, ruisverwijdering op basis van veralgemeende kruisvalidatie, schalering, zachte en harde drempelmaskering, randverbetering.

Basisbewerkingen Optellen en aftrekken van beelden.

Hulpoperaties Berekening van de piek signaal-ruisverhouding (PSNR), eerste orde Shannon-entropie, correlatiematrices, minima en maxima in een beeld, histogrammen, veralgemeende kruisvalidatiewaarden.

Beeldinvoer en -uitvoer Invoer van beelden in PNM- en TIFF-formaat en uitvoer van beelden in PNM-formaat.

PIEFPAK bevat tevens een interactief voorbeeldprogramma dat het gebruik van een aantal van deze operaties (bvb. wavelet-transformaties, drempelmaskering en ruisverwijdering) demonstreert. Broncode in C++ voor een eenvoudig compressievoorbeeld is beschikbaar in Appendix B.

De C++-broncode van PIEFPAK, met inbegrip van de voorbeelden, telt ca. 12500 programmalijnen.

5.5 Evaluatie van het compressiepotentieel

We evalueerden het compressiepotentieel van een aantal wavelet-transformaties m.b.v. een eenvoudige compressietechniek: harde drempelwaardemaskering. Als testbeeld namen we een 8-bit grijswaardenbeeld van 768×768 beeldpunten (een luchtfoto van onze campus). Het beeld werd getransformeerd tot op 6 ontbindingsniveaus m.b.v. de gehele-getallen-wavelet-transformatieroutines in WAILI.

De compressieverhouding werd geschat op basis van de eerste orde Shannon-entropie [41] van de wavelet-coëfficiënten na drempelwaardemaskering. De entropie is een maat voor de hoeveelheid bits die nodig zijn om deze coëfficiënten te encoderen. De beeldkwaliteit na reconstructie werd gemeten m.b.v. de piek signaal-ruisverhouding. We vergeleken zowel met het originele beeld als met een door WAILI ontruisde versie van het beeld. Dit heeft zin aangezien het originele beeld ruis bevat en omdat ruisverwijdering ook gebruik maakt van drempelwaardemaskering: bij lage compressieverhoudingen ziet het beeld na reconstructie er beter uit dan het origineel omdat het minder ruis bevat. De CDF $(2,2)$-wavelets blijken de beste resultaten te geven.

6 Grootschalige beeldverwerking

In toepassingen zoals Geografische Informatiesystemen (GIS) worden beeldgroottes uitgedrukt in gigabytes (GB) en soms zelfs in terabytes (TB). Een kleurenbeeld van België waarbij elk beeldpunt overeenkomt met één vierkante meter verbruikt 90 GB opslagcapaciteit. Het is duidelijk dat zulke beelden moeten worden opgeslagen en verwerkt in gecomprimeerde vorm. Dit is mogelijk m.b.v. wavelet-gebaseerde technieken.

We beschrijven een uitbreiding van de programmabibliotheek PIEFPAK naar blokgebaseerde verwerkingen [55]. Dit laat eventueel een parallelle implementatie toe.

6.1 Zeer grote beelden en tegeling

We definiëren een *zeer groot beeld* als een beeld dat niet past in het geheugen van de computer waarmee het wordt verwerkt.

Tegeling

Zulke grote beelden moeten worden opgedeeld in blokken (tegeling). Aangezien wavelets lokaal zijn in het ruimtedomein heeft men slechts een beperkt deel van een invoerbeeld nodig om een deel van de wavelet-coëfficiënten te berekenen. Vermits niet alle blokken tegelijkertijd hoeven aanwezig te zijn in het hoofdgeheugen kan men dus op efficiënte wijze grote beelden verwerken. Bovendien kan de verwerking van de afzonderlijke blokken worden verdeeld over meerdere processoren.

In PIEFPAK verdelen we elke subband apart in blokken. Dit heeft de volgende gevolgen voor wavelet-transformaties:

Splitsing (luie wavelet-transformatie) Om een blok op te splitsen in “even” en “oneven” coëfficiënten zijn geen andere blokken nodig. In deze stap zijn er dus geen problemen.

Liftingstappen Om een liftingstap te berekenen van een randcoëfficiënt zijn een paar coëfficiënten — een aantal afhankelijk van de gekozen wavelet-transformatie — van een naburig blok nodig. In een parallelle implementatie vereist dit dus communicatie tussen de processoren.

Blokbeheer

We voegden ondersteuning voor beelden opgedeeld in blokken toe aan de bibliotheek PIEFPAK, die we tevoren hadden ontwikkeld. Dit gebeurde op een manier die zo goed als transparant is voor de gebruiker.

De verantwoordelijkheid voor het beheer van de blokken ligt bij een blokbeheerder: als een blok nodig is moet men eerst de blokbeheerder vragen om dit blok op te halen (bvb. van een schijf of via een netwerk). Als een blok wordt gewijzigd moet het nadien worden geactualiseerd op het opslagapparaat.

Implementatie in PIEFPAK

We implementeerden blokgebaseerde wavelet-transformaties door twee subklassen af te leiden van de NTChannel-klasse: *NTChannelR* voor normale subbanden, bestaande uit slechts één blok, en *NTChannelB* voor subbanden bestaande uit meerdere blokken. Bij elk beeld hoort een *BlockMgr* object dat zorgt voor het beheer van de individuele blokken.

Deze uitbreiding deed de broncode van PIEFPAK groeien van ca. 12500 tot ca. 21000 lijnen C++-code.

6.2 Beeldverwerking op getegelde beelden

Een aantal wavelet-gebaseerde beeldverwerkingsoperaties kan men nog steeds uitvoeren op beelden die in blokken zijn verdeeld.

Blokgebaseerde ruisverwijdering

PIEFPAK gebruikt zachte drempelmaskering om additieve stationaire ruis te verwijderen. De drempelwaarde wordt per subband gekozen m.b.v. veralgemeende kruisvalidatie [57]. Voor getegelde beelden passen we deze techniek toe op de aparte blokken: de drempelwaarde kan dus verschillend zijn per blok. Dit is triviaal te parallelliseren.

Omdat enkel de hoogfrequente subbanden worden aangepast kan men de randen van de blokken visueel niet onderscheiden. Deze methode blijkt zelfs betere resultaten te geven dan met een drempelwaarde per subband, wat verklaard kan worden door de aanpassing aan de lokale eigenschappen van het beeld.

Beeldcompressie

Wavelet-gebaseerde compressietechnieken maken dikwijls gebruik van nulboomcodering. Deze techniek is echter niet bruikbaar voor getegelde beelden omdat de wavelet-coëfficiënten in een nulboom verspreid zijn over een veelvoud aan blokken. Een mogelijke oplossing is een strategie bestaande uit twee niveaus: nulboomcodering voor de grofste resolutieniveaus, waar elke subband slechts één blok bevat, en een blokgebaseerde encodering voor de fijne niveaus. Indien de blokgrootte voldoende groot is bevatten de blokken behorende tot de fijne niveaus hopelijk voldoende kleine coëfficiënten om efficiënt te worden gecomprimeerd. Ook dit is eenvoudig te parallelliseren.

Knip- en plakwerk

PIEFPAK implementeert knip- en plakoperaties op getegelde wavelet-transformaties op een transparante en efficiënte wijze. Omwille van de lokaliteit van wavelets zijn slechts een beperkt aantal blokken nodig om deze operaties uit te voeren.

Een GIS-toepassing

In GIS-toepassingen wordt een groot beeld meestal samengesteld uit een aantal kleinere luchtfoto's. Een wavelet-getransformeerde getegelde versie van zo'n beeld kunnen we op volgende wijze creëren:

1. Creëer een leeg zeer groot beeld (d.w.z. een egaal grijs beeld).

2. Voor alle luchtfoto's i

(a) Laad luchtfoto i in het computergeheugen.

(b) Transformeer luchtfoto i, rekening houdende met de absolute coördinaten en de resolutie van de foto.

(c) Plak de wavelet-getransformeerde foto i in het zeer grote beeld.

Hierna heeft men een wavelet-getransformeerd beeld dat identiek is aan de wavelet-transformatie van de samenvoeging van de kleine luchtfoto's.

Daarna kan men dankzij de multiresolutie-eigenschappen van wavelets een willekeurig rechthoekig deelbeeld selecteren op een willekeurig dyadisch resolutieniveau.

6.3 Transformatieresultaten

We analyseren de (sequentiële) performantie van onze wavelet-transformatiecode en maken een aantal bedenkingen voor een parallelle implementatie. Een parallelle implementatie vereist communicatie van de randcoëfficiënten van de blokken. Deze communicatie is echter verwaarloosbaar t.o.v. de benodigde rekentijd. We concluderen dat een parallelle implementatie efficiënt kan zijn indien het aantal wavelet-transformatieniveaus klein is en het aantal processoren niet te groot in verhouding tot de beeldgrootte.

7 De rood-zwart-wavelet-transformatie

Klassieke ééndimensionale wavelet-transformaties kunnen worden uitgebreid naar meerdere dimensies m.b.v. tensorproducten, met een separabele transformatie als gevolg. Dit heeft als nadeel dat men een anisotropie introduceert in de wavelet-ontbinding: in het tweedimensionale geval worden de horizontale en verticale eigenschappen van de invoergegevens bevoordeeld; anders-georiënteerde eigenschappen worden niet zo makkelijk gedetecteerd. Niet-separabele wavelets zijn een mogelijkheid, tweede-generatie-wavelets zijn een andere optie.

We presenteren een nieuw soort tweede-generatie-wavelets op een rechthoekig rooster (een quincunx rooster [30]), geconstrueerd m.b.v. het liftingschema.

7.1 Rood-zwart en blauw-geel

In Hoofdstuk 3.1 legden we de basisprincipes van het liftingschema uit op een abstracte manier. Deze principes kan men ook toepassen voor hoger-dimensionale gegevensverzamelingen. Wij passen ze toe op een rechthoekig rooster, gebruik makende van een tweedimensionaal analoog van de CDF $(2,2)$-wavelets.

We lieten ons inspireren door de welbekende rood-zwart Gauss-Seidel-techniek voor de iteratieve oplossing van lineaire systemen en splitsen het rooster λ_{j+1} op volgens een schaakbordpatroon, in "rode" en "zwarte" vierkantjes. Vervolgens voorspellen we de zwarte verzameling γ_j aan de hand van het gemiddelde van de vier meest nabije buren uit de rode verzameling λ_j. Daarna passen we de rode verzameling λ_j aan m.b.v. de zwarte verzameling γ_j om de gemiddelde waarde te behouden. Hierna is de rode verzameling een laagfrequente benadering van de originele gegevens, terwijl de zwarte verzameling de detailinformatie bevat.

Voor het daaropvolgende resolutieniveau $j-1$ gaan we verder met de rode verzameling uit het vorige niveau. Omdat de gegevens in deze verzameling georganiseerd zijn volgens de diagonalen kunnen we niet meer exact dezelfde operatie uitvoeren als op het vorige niveau. In de plaats daarvan roteren we het rooster over 45° en splitsen de rode verzameling λ_j in een blauwe verzameling λ_{j-1} en een gele verzameling γ_{j-1}. Dezelfde predictie- en bijsturingsoperatoren worden nu uitgevoerd op de blauwe en gele vierkantjes. De resulterende blauwe verzameling vormt terug een horizontaal-verticaal patroon.

De hele multiresolutie-boom bestaat dus uit een opeenvolging van afwisselend een rood-zwart- en een blauw-geel-opsplitsing. Een omkeerbare gehele-getallenversie is zeer eenvoudig af te leiden door het toevoegen van een afrondingsoperatie in elke liftingstap.

We maken gebruik van eenvoudige predictie- en bijsturingsoperatoren gebaseerd op de ééndimensionale CDF $(2,2)$-wavelets. Dit geeft wavelets met twee nulmomenten. Meer complexe predictie- en bijsturingsoperatoren genereren wavelets met andere eigenschappen.

Het principe van rood-zwart-wavelets is niet beperkt tot planaire quincunxroosters: het kan bvb. worden uitgebreid tot driehoekige of hexagonale regelmatige roosters, of tot roosters op een boloppervlak.

7.2 Eigenschappen van de rood-zwart-wavelet-transformatie

De rood-zwart-wavelet-transformatie heeft de volgende eigenschappen:

2D Het is een echte tweedimensionale transformatie die niet-separabele wavelets genereert.

Isotropie Ze is minder anisotroop dan tensorproduct-wavelets op hetzelfde rooster.

Symmetrie Alle basisfuncties hebben vier symmetrie-assen.

Biorthogonaliteit De rood-zwart-wavelets zijn biorthogonaal.

Zachtverlopendheid De rood-zwart-wavelets hebben twee nulmomenten.

Implementatie De complexiteit van de transformatie is $O(n)$, zoals geldt voor elke wavelet-transformatie.

7.3 Vergelijking met de CDF $(2,2)$ tensorproduct-wavelets

We vergeleken de rood-zwart-wavelets met de CDF $(2,2)$ tensorproduct-wavelets in een ruisverwijderingstoepassing. In beide gevallen ging het om de gehele-getallenvariant van de transformatie. De tensorproduct-wavelets gaven marginaal betere resultaten, behalve voor fijne randen die niet horizontaal, verticaal of diagonaal georiënteerd zijn. Zulke randen werden beter behouden door de rood-zwart-wavelets.

8 Experimenten met een wavelet-gebaseerde APOD

In vele deeldomeinen van toegepaste wetenschappen onderzoekt men het gedrag van grootschalige dynamische systemen, beschreven door partiële differentiaalvergelijkingen. Omwille van de hoogdimensionaliteit van deze systemen wenst men eerst de complexiteit terug te brengen.

De orthogonale eigenontbinding (POD — Proper Orthogonal Decomposition) of Karhunen-Loève-ontbinding (KLT) is een krachtig hulpmiddel voor modelreductie. Uitgaande van een verzameling oplossingsprofielen (verkregen via experimenten of berekeningen), momentopnames genoemd, berekent men een "optimale" basis van eigenmodes voor het systeem. Deze basis kan men later gebruiken om een laagdimensionaal model op te stellen. De constructie van een orthogonale eigenontbinding is echter een kostelijke operatie, evenals de projectie van het oorspronkelijke probleem op de basis gevormd door de eigenmodes.

8.1 De orthogonale eigenontbinding

De orthogonale eigenontbinding berekent een "ideale" orthonormale basis voor een gegeven set van S lineair onafhankelijke momentopnames X_i (vectoren met lengte N, waarbij $S \ll N$). Met "ideaal" bedoelen we de basis die de beste (kleinste kwadraten) benadering van de momentopnames geeft met zo weinig mogelijk basisvectoren. De basisvectoren zijn zo geordend dat de beste benadering met i vectoren bekomen wordt door de eerste i basisvectoren te nemen.

Veronderstel dat het gemiddelde van de momentopnames nul is, dan wordt deze basis gegeven door de eigenvectoren E_k van de $N \times N$ covariantiematrix

$$C = \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} X_i X_i^T .$$

De eigenwaarden λ_k zijn een indicatie voor het relatief belang van de bijhorende eigenvector E_k: we sorteren de eigenvectoren dus in dalende volgorde van de grootte van de eigenwaarden. De eigenvectoren worden ook wel eigenmodes genoemd.

Als we de momentopnames eerst normaliseren:

$$X_i \leftarrow \frac{X_i}{\|X_i\|\sqrt{S}}$$

is de som van de eigenwaarden gelijk aan 1. In dat geval bevat eigenmode E_k $100 \times \lambda_k\%$ van de totale energie.

De constructie van de covariantiematrix C vereist $O(SN^2)$ operaties. De complexiteit kan echter gevoelig gereduceerd worden m.b.v. de “methode van de momentopnames” [45]. Als we gebruik maken van de eigenschap dat de eigenvectoren kunnen geschreven worden als een unieke lineaire combinatie van de momentopnames, dan kunnen we het oorspronkelijk eigenwaardenprobleem met matrix C vervangen door een ander eigenwaardenprobleem met matrix

$$C^* = \left[c^*_{i,j}\right] = \left[X_i^T X_j\right], \qquad i,j = 0,\ldots,S-1.$$

De constructie van de matrix C^* vergt slechts $O(NS^2)$ operaties.

8.2 De benaderende orthogonale eigenontbinding

Zelfs m.b.v. de methode van de momentopnames blijft de berekening van de POD een dure operatie. De basisidee achter de benaderende POD (APOD — Approximate Proper Orthogonal Decomposition) bestaat erin de momentopnames vooraf te decorreleren m.b.v. wavelets en de klassieke POD te berekenen voor de gecomprimeerde momentopnames. We hopen hiermee nog steeds een voldoende goede benadering van de echte eigenmodes te bekomen met gevoelig minder rekenwerk.

De momentopnames X_i worden dus getransformeerd m.b.v. een decorrelerende transformatie (wij gebruiken een wavelet-packet-transformatie) en gecomprimeerd door enkel de belangrijkste coëfficiënten in de wavelet-packet-basis te behouden. Vervolgens berekenen we de POD voor de gecomprimeerde momentopnames, wat ons gecomprimeerde eigenmodes en eigenwaarden geeft. Na decompressie en een inverse wavelet-packet-transformatie krijgen we dus een (hopelijk goede) benadering van de echte eigenmodes. Indien de decorrelerende transformatie niet orthogonaal is maar biorthogonaal, zijn er niet alleen primale maar ook duale benaderende eigenmodes.

De APOD kan gebruikt worden als alternatief voor de echte POD om de hoeveelheid rekenwerk te verminderen en/of om een laagdimensionaal model te construeren voor het originele probleem, gebaseerd op de benaderende eigenmodes.

We kozen voor een wavelet-packet-transformatie als decorrelerende transformatie aangezien deze dichter bij de echte POD staat dan een gewone wavelet-transformatie omwille van de extra vrijheidsgraden bij de keuze van de basisfuncties.

Ontbinding in een basis van benaderende eigenmodes

Een willekeurige momentopname kan benaderd worden door een lineaire combinatie van de genormaliseerde benaderende eigenmodes. De coëfficiënten van deze ontbinding worden berekend m.b.v. inwendige producten met de (duale) benaderende eigenmodes. Bovendien kunnen deze coëfficiënten ook bekomen worden in het wavelet-domein, als inwendige producten met de gecomprimeerde (duale) eigenmodes.

Welke aanpak men volgt hangt af van een aantal factoren. Indien de momentopnames vierkant zijn met grootte $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$, de gecomprimeerde momentopnames n elementen tellen en we s eigenmodes behouden, dan is de complexiteit:

- in het originele domein: s inwendige producten in $\mathbf{R}^N$ $(O(sN))$,
- in het wavelet-domein: S wavelet-packet-transformaties $(O(SN \log \sqrt{N}))$ en s inwendige producten in $\mathbf{R}^n$ $(O(sn))$.

8.3 Resultaten

We hebben het gebruik van de APOD geëvalueerd aan de hand van de analyse van het dynamisch gedrag van de discretisatie van een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen, horende bij een reactie-diffusie-systeem (de ééndimensionale Brusselator [22]).

We kozen voor symmetrische biorthogonale wavelets uit de familie van Cohen-Daubechies-Feauveau met 2 nulmomenten [9]. Als kostcriterium voor de selectie van de beste wavelet-packet-basis namen we het logaritme van de energie-inhoud $(\sum_i \log x_i^2)$.

Uitgaande van een aantal verzamelingen van momentopnames voor een aantal verschillende parameterwaarden, bekomen m.b.v. tijdsintegratie, construeerden we een laagdimensionaal model voor het reactie-diffusie-systeem. Deze momentopnames bevatten een aantal intrinsieke eigenschappen van het model, bvb. periodieke oplossingen. De magnitude van een eigenwaarde geeft aan hoe belangrijk de bijhorende eigenmode is. We krijgen dus een goede benadering als we de eigenmodes horende bij de grootste eigenwaarden behouden. De verdeling van de eigenwaarden geeft aan hoe goed de momentopnames gedecorreleerd waren. De som van de 4 grootste eigenwaarden is steeds groter dan 0.99, zowel voor de POD als voor de APOD. Ook als we de momentopnames ontbinden in de basis van de 4 belangrijkste eigenmodes zien we dat deze ontbinding bijna altijd 99% van de totale energie in de momentopnames opvangt, zowel voor de POD als voor de APOD.

Het gedrag van het dynamisch systeem wordt duidelijk bij analyse van de coëfficiënten in de basis van de eigenmodes. De periodiciteit in de momentopnames is duidelijk zichtbaar in het verloop van de coëfficiënt horende bij de belangrijkste eigenmode. We testten het laagdimensionaal model aan de hand van een verzameling “vreemde” momentopnames die niet gebruikt werden voor de constructie van het model. Deze momentopnames tonen een periodieke oplossing inclusief overgangsverschijnselen. Ook dit gedrag is duidelijk zichtbaar in het verloop van de coëfficiënten.

De complexiteit van de APOD is $O(SN\log N) + O(S^2N/C) + O(S^3)$, met S het aantal momentopnames, N de grootte van de momentopnames en C de compressieverhouding, vergeleken met $O(NS^2) + O(S^3)$ voor de POD zelf. Indien S van dezelfde grootte-orde is als $\log N$ geeft de APOD dus geen rekenvoordeel. Merk op dat de factor $\log N$ enkel geldig is voor het ééndimensionale geval, voor het d-dimensionale geval wordt dit $\log \sqrt[d]{N}$. Deze factor daalt sterk voor stijgende dimensie, dus voor hogere dimensies kunnen we wel winst maken.

9 Conclusies en suggesties voor toekomstig onderzoek

9.1 Wavelet-transformaties

De wavelet-transformatie laat toe om gegevens te decorreleren omdat wavelets gelokaliseerd zijn in zowel ruimte/tijd als schaal/frequentie en omdat ze zijn gebaseerd op een multiresolutie-analyse. Het liftingschema is een efficiënte implementatie van een wavelet-transformatie-algoritme. Verder kan het eenvoudig worden omgezet om gehele-getallengegevens te verwerken. De inverse transformatie is triviaal te vinden en voorziet altijd in een perfecte reconstructie van de invoergegevens. We hebben de details van gehele-getallentransformaties uitgewerkt voor een bepaalde klasse van biorthogonale wavelets (Cohen-Daubechies-Feauveau).

Het liftingschema kan niet alleen worden gebruikt voor de berekening van klassieke biorthogonale wavelet-transformaties; het is eveneens een modelschema voor het ontwerp van zogenaamde tweede-generatie-wavelets. Dit zijn wavelets die niet eenvoudigweg afgeleid zijn van de translaties en dilaties van een ééndimensionale functie. Als voorbeeld hiervan creëerden we wavelets op een rechthoekig rooster, gebaseerd op een rood-zwart-blokschema. De resulterende rood-zwart-wavelets zijn niet-scheidbare tweedimensionale wavelets, in tegenstelling tot klassieke tensorproduct-wavelets. In een ruisverwijderingstoepassing toonden we aan dat ze minder anisotroop zijn en de horizontale en verticale dimensies niet zo sterk bevoordelen. De idee achter rood-zwart-wavelets kan eenvoudig worden toegepast op hogere dimensies en meer complexe geometrieën.

9.2 Een programmabibliotheek voor wavelet-gebaseerde beeldverwerking

We ontwikkelden de C++-programmabibliotheek PIEFPAK (WAILI — Wavelets with Integer Lifting), dewelke wavelet-transformaties en wavelet-gebaseerde beeldverwerkingsoperaties implementeert. De gehele-getallenversie van het liftingschema vormt het fundament van PIEFPAK.

De bibliotheek implementeert verscheidene wavelet-transformaties uit de biorthogonale familie van Cohen-Daubechies-Feauveau op beelden met willekeurige afmetingen. Men kan eenvoudig andere wavelet-transformaties toevoegen op voorwaarde dat men beschikt over een ontbinding in liftingstappen.

PIEFPAK voorziet in een aantal beeldverwerkingsoperaties op wavelet-getransformeerde beelden. Zachte drempelmaskering m.b.v. gegeneraliseerde kruisvalidatie is een efficiënte en goed presterende methode voor ruisverwijdering. Andere belangrijke bewerkingen zijn knip- en plakoperaties: dankzij de ruimtelijke lokaliteit van wavelets kan men deelbeelden uitknippen uit of plakken in een groter wavelet-getransformeerd beeld zonder ze te hertransformeren, waarbij slechts een zeer beperkte deelverzameling van wavelet-coëfficiënten wordt beïnvloed.

PIEFPAK werd ook uitgebreid voor de behandeling van zeer grote beelden. Door de individuele wavelet-subbanden in blokken te verdelen op een voor de gebruiker transparante manier, kunnen grote beelden worden getransformeerd en verwerkt. De blokken worden verwerkt onder supervisie van een blokbeheerder. De opdeling in blokken heeft eveneens een gunstige invloed op de prestaties van de ruisverwijdering: vermits ruisverwijdering nu gebeurt op onafhankelijke blokken past ze zich beter aan aan de lokale eigenschappen van het beeld.

Dit ontwerp biedt goede mogelijkheden voor parallellisatie aangezien de meeste bewerkingen slechts communicatie van een smalle strook wavelet-coëfficiënten vereisen (bvb. liftingstappen), of zelfs helemaal geen communicatie (bvb. ruisverwijdering).

9.3 Een benaderende POD m.b.v. wavelet-packets

Dankzij haar uitstekende decorrelatie-eigenschappen vormt een wavelet-packet-transformatie een goede benadering van de theoretisch ideale decorrelatiemethode, de orthogonale eigenontbinding (Proper Orthogonal Decomposition — POD). De complexiteit van een systeem ter analyse kan dramatisch worden gereduceerd door de gegevens te comprimeren in het wavelet-packet-domein.

Om de voorafberekende oplossingsprofielen van een complex dynamisch systeem te analyseren gebruikten we de benaderende POD (Approximate POD — APOD). We deden experimenten met een reactie-diffusie-systeem dat wordt beschreven door partiële differentiaalvergelijkingen. De APOD liet een goede reconstructie van de originele gegevens toe, waarbij slechts weinig eigenmodes nodig waren. Zodoende werd de laagdimensionale natuur van ons dynamisch systeem onthuld. De APOD kan worden gebruikt om een laagdimensionaal model te construeren voor het originele probleem, wat een snelle en eenvoudige analyse van het dynamisch systeem toelaat.

9.4 Suggesties voor toekomstig onderzoek

We suggereren voorlopig een tweetal richtingen voor toekomstig onderzoek:

1. Moderne microprocessoren bevatten extra instructies voor de efficiënte parallelle uitvoering van een aantal operaties die zeer nuttig zijn voor multimedia toepassingen. Het moet mogelijk zijn om m.b.v. deze instructies een zeer goed geoptimaliseerde versie van de gehele-getallen-wavelet-transformatie te implementeren en deze in PIEFPAK te integreren.

2. De uitbreiding van PIEFPAK voor de behandeling van zeer grote beelden opgedeeld in blokken werd nog niet geparallelliseerd. Een aanpassing van de bibliotheek voor een parallelle uitvoering zou een interessant onderwerp voor verder onderzoek zijn.